Высокоэффективный метод вычисления пропускной способности линии связи

Е.Г. Шапиро[1,2,*], **Д.А. Шапиро**[1,2] **and С.К. Турицын**[2,3],

[1] *Институт автоматики и электрометрии СО РАН*
[2] *Новосибирский государственный университет*
[3] *Aston Institute of Photonic Technologies, Aston University, UK*
* *E-mail:* elena.shap@gmail.com

Пропускная способность канала связи без памяти, определенная здесь как максимальное количество информации, передаваемое без ошибок в единицу времени на единицу спектральной ширины канала B и на степень свободы, математически описывается формулой Шеннона [1]: $\frac{C}{B} = \max_{P_x(x)}\{\iint dydxP(y|x)P_x(x)\log_2[\frac{P(y|x)}{\int dsP(y|s)P_x(s)ds}]\}$.

Здесь $P_x(x)$ - вероятностное распределение ($\int P_x(x)dx = 1$) входного сигнала. Оно должно быть определено при решении задачи на максимум функционала C/B при дополнительном условии $\int x^2 P_x(x)dx = S$. $P(y|x)$ – заданная плотность вероятности детектирования значения y при передаче по каналу входного сигнала x. Решение задачи о шенновской пропускной способности канала возможно аналитически для очень ограниченного класса каналов связи и, как правило, требует численных расчетов [2]. Самым известным и широко применяемым в этой области численным алгоритмом является метод Аримото-Блэхута [2]. В этой работе мы опишем новый метод вычисления пропускной способности канала связи и покажем его преимущества в сравнении с методом [2].

Если алфавит входного сигнала ограничен дискретными значениями, тогда $P_x(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k\delta(x - x_k)$. Пропускная способность канала C/B задается формулой:

$$\frac{C}{B} = \max_{p_k}\{\sum_{k=1}^{N} p_k \int dyP(y|p_k)\log_2[\frac{P(y|p_k)}{\sum_{m=1}^{N} p_m P(y|p_m)}]\}. \qquad (1)$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Будем искать решение следующей системы уравнений (F=C/B): $\frac{\partial F}{\partial x_k} - 2\lambda p_k x_k = 0,\ k = 1,\dots,N; \sum_{k=1}^{N} p_k x_k^2 = S$. Пусть $F_k = {}^{\partial F}/_{\partial x_k}$, $\Phi_k = F_k - 2\lambda p_k x_k$.Введем дополнительный параметр t, будем считать, что $x_k(t), k = 1,\dots,N;\ \lambda(t)$– функции переменной t. Найдем решение динамической системы уравнений $\frac{d\Phi_k}{dt} = -\Phi_k,\ k = 1,\dots,N;\ \sum_{k=1}^{N} p_k x_k^2 = S$. Видно, что с ростом t решение дополнительной системы сходится к решению исходной системы уравнений.

Положим $w_k = \frac{dx_k}{dt}$. Тогда $\dot{\Phi}_k = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} w_l = -\Phi_k$. Далее зададим достаточно большой шаг по времени τ и выполним следующие итерации:

0. задаем некоторые начальные значения $x_1,\dots,x_N$,
1. находим w_k, решая линейную систему уравнений,
2. полагаем $x_k(t + \tau) = x_k(t) + \tau w_k$,
3. повторяем пункты 1 и 2 до тех пор, пока не будет с достаточной точностью выполнено искомое равенство.

Пусть оптимальным распределением является дискретная функция $P_x(x)=\sum_{k=1}^{N} p_k\delta(x-x_k)$. Найдем значения $z_1, z_2, \ldots, z_M$, при которых достигается максимум функции (1), если заданы вероятности $\tilde{p}_i$ величин z_i: $\tilde{p}_i = \frac{1}{M}, i = 1, \ldots, M$. Сравним $P_x(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k\delta(x - x_k)$ и $\tilde{P}_x(x) = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{M}\delta(x - z_k)$. Аппроксимируем функцию $F(x)$ суммой $R_x(x) = \sum_{i=1}^{N} r_i\delta(x - x_i)$ с рациональными коэффициентами $r_i = \frac{m_i'}{M}$. Числа m_i' выбираются так, чтобы $|p_i - r_i| \le \frac{1}{M}$ и $m_1' + \cdots + m_N' = M$. Увеличивая M, можно аппроксимировать $P_x(x)$ с любой заданной точностью.

Сравним вычисление пропускной способности канала Райса $P(y|x) = \frac{y}{\sigma}e^{-\frac{y^2+x^2}{2\sigma^2}} I_0(\frac{yx}{\sigma^2})$ при $\sigma = 1$ методом Аримото-Блэхута [2] и методом, описанным выше. Можно показать аналитически, что оптимальным форматом при небольших значениях величины S является бинарный формат, при котором передаются нулевые и единичные биты. Численно этот утверждение подтверждается в работе [3].

На рис.1а приведена функция распределения вероятности $V(x) = \int_0^x P_x(\tilde{x})d\tilde{x}$, полученная при $M = 401, S = 1.4$ предложенным выше методом. Плотность вероятности в этом случае есть функция $p(x) = p_1\delta(x - x_1) + p_2\delta(x - x_2)$, $x_1 = 0$, $p_1 = 0.875$, $x_2 = 3.35$, $p_2 = 0.125$.

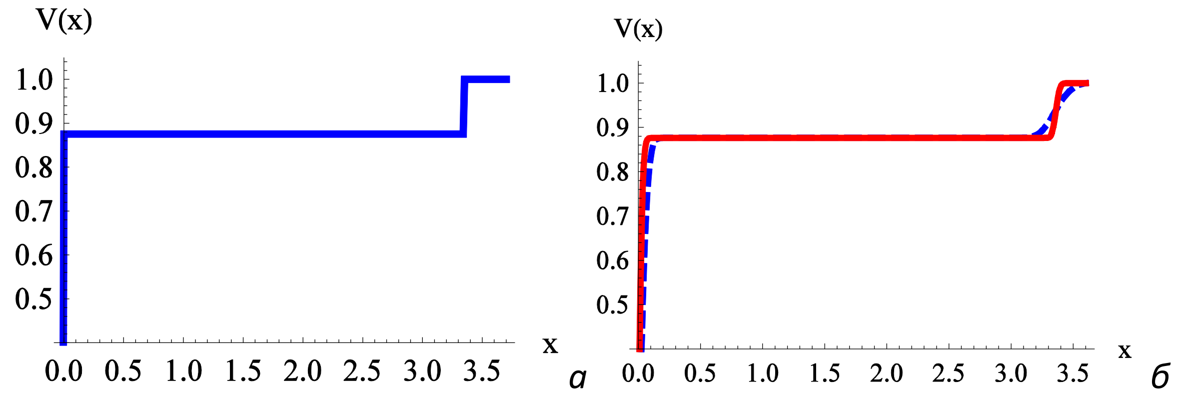

Рис. 1 Оптимальная вероятность x, полученная новым методом (а) и методом Аримото-Блэхута (б).

На рис.1а приведена функция полученная новым методом после 500 итераций. На рис.1б показано распределение, полученное методом Аримото–Блэхута: сплошной линией изображена функция распределения вероятности $V(x)$ после 20000 итераций, прерывистой – после 1000 итераций. Для получения графика 1а потребовалось примерно в 3 раза меньше времени, чем для сплошной кривой 1б.

Если плотность вероятности является суммой δ-функций, то распределение вероятности есть сумма функций Хэвисайда, имеющая ступенчатый профиль. Преимуществом предложенного метода является то, что $V(x)$ сразу состоит из «ступенек» (рис 1а). Если использовать метод Аримото-Блэхута, «ступеньки» получаются сглаженными (рис 1б) и для хорошей точности аппроксимации требуется значительно увеличить количество точек по переменной x, что также увеличивает время вычислений.

Литература

[1] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 379-423, 623-656 (1948).
[2] S. Arimoto, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **18**, 14-20 (1972).
[3] K.-P. Ho, *IEEE Photon. Technol. Lett.*, **17**, 858-860, (2005).