

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ БРИЗЕРОВ

И. И. Мулляджанов

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

ilyamullyadzhanov05@gmail.com

Нелинейная динамика когерентных солитонных структур, которые возникают во многих физических системах, от волоконно-оптических линий связи и волн на воде до конденсата Бозе — Эйнштейна, представляет собой широкое поле экспериментальных, теоретических и численных исследований. Феномен модуляционной неустойчивости усложняет поведение солитонов, создавая широкий спектр нелинейных эффектов, таких как экспоненциальный рост определенных гармоник и образование экстремальных амплитудных структур волн — волнубийц. Кроме того, добавление нестабильного по отношению к малым возмущениям постоянного фона в систему приводит к появлению нового класса когерентных структур, называемых бризерами, которые имеют глубокое математическое и физическое описание, в том числе при помощи метода обратной задачи рассеяния (МОЗР).

Рассматривается модель фокусирующего одномерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) (1) в присутствии нестабильного постоянного фона, на котором могут существовать когерентные волновые структуры — бризеры. В качестве фона рассматривается решение НУШ (2), имеющее такие параметры, как амплитуда A и фаза Θ .

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0, \# \quad (1)$$

$$\psi_0 = Ae^{i\Theta + iA^2t}, \# \quad (2)$$

При помощи МОЗР исследуется задача численного получения данных рассеяния для бризеров, локализованных в пространстве. Для них был обобщен классический алгоритм Боффетты — Осборна [1], изначально разработанный для солитонов. Ключевой элемент подхода заключается в получении соотношений (3), (4) и (5) между коэффициентами рассеяния $a_r(\lambda), b_r(\lambda), a_r'(\lambda)$ и элементами 4×4 матрицы переноса \mathbf{T} для промежутка длины L , выведенными в присутствии постоянного фона с учетом его фазы на левом Θ_- и правом Θ_+ -конце.

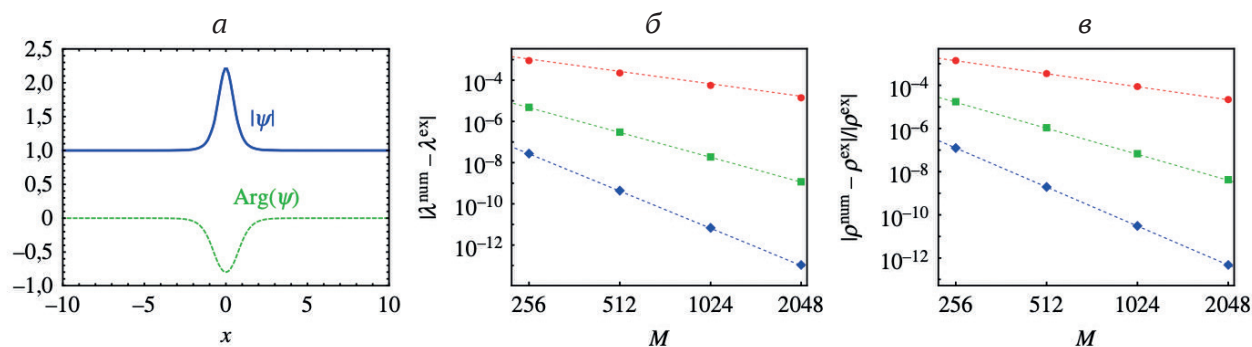
$$atr(\lambda) = \frac{e^{2i\zeta L}}{1-p^2} \left\{ T_{11} + T_{12}pe^{-i\Theta_-} - T_{21}pe^{i\Theta_+} - T_{22}p^2e^{i(\Theta_+ - \Theta_-)} \right\}, \# \quad (3)$$

$$btr(\lambda) = \frac{1}{1-p^2} \left\{ -T_{11}pe^{-i\Theta_+} + T_{12}p^2e^{i(\Theta_+ - \Theta_-)} + T_{21} + T_{22}pe^{-i\Theta_-} \right\}, \# \quad (4)$$

$$a_r'(\lambda) = \frac{e^{2i\zeta L}}{1-p^2} \left\{ \begin{aligned} & T_{31} + T_{32}pe^{-i\Theta_-} - T_{41}pe^{i\Theta_+} - T_{42}p^2e^{i(\Theta_+ - \Theta_-)} + \\ & + \frac{2iL\lambda}{\zeta} \left(T_{11} + T_{12}pe^{-i\Theta_-} - T_{21}pe^{i\Theta_+} - T_{22}p^2e^{i(\Theta_+ - \Theta_-)} \right) + \\ & + \frac{p}{\zeta(1-p^2)} \left(-2T_{11}p - T_{12}(1+p^2)e^{-i\Theta_-} + T_{21}(1+p^2)e^{i\Theta_+} - T_{22}pe^{i(\Theta_+ - \Theta_-)} \right) \end{aligned} \right\}, \# \quad (5)$$

где $\zeta = \sqrt{\lambda^2 + A^2}$, $p = -\frac{iA}{\lambda + \zeta}$, T_{ij} — элементы матрицы \mathbf{T} .

© И. И. Мулляджанов, 2024



Тест сходимости разработанного алгоритма. Волновое поле представлено одиночным бризером Кузнецова — Ма (а). Графики б и в демонстрируют абсолютную ошибку при получении собственного значения λ_n и относительную ошибку для нормирующей константы ρ_n . M — число точек дискретизации. Красные точки, зеленые квадраты и синие ромбы (б, в) соответствуют второму, четвертому и шестому порядкам сходимости

Для численного расчета матрицы рассеяния \mathbf{T} используются стандартный метод Боффетты — Осборна второго порядка и недавно разработанные усовершенствованные численные схемы высокого порядка, основанные на разложении Магнуса [2]. Численные эксперименты подтверждают заявленные порядки сходимости разработанных схем (см. рисунок). Таким образом может быть получен полный набор дискретных данных рассеяния $\{\lambda_n, \rho_n\}$. В нашем подходе рассматривается общий случай произвольных фаз конденсата Θ_{\pm} , что позволяет охватить класс локализованных в пространстве бризеров, за исключением бризера Перегринна и его высокопорядковой аналогии [3].

Литература

1. Boffetta G., Osborne A. R. Computation of the direct scattering transform for the nonlinear Schroedinger equation // J. Comput. Phys. 1992. Vol. 102. P. 252–264.
2. Mullyadzhyanov R., Gelash A. Direct scattering transform of large wave packets // Opt. Lett. 2019. Vol. 44. P. 5298–5301.
3. Akhmediev N., Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. 2009. Vol. 80. P. 026601.