НОВЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЗАХАРОВА-ШАБАТА

Медведев С.Б.[1,2], Чеховской И.С.[2], Качулин Д.И. [2,3], Васева И.А. [1,2], Федорук М.П. [2,1]
[1] Федеральный исследовательский центр институт вычислительных технологий, г. Новосибирск, Россия
[2] Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия
[3] Сколковский институт науки и технологий, г. Москва, Россия

Разработано семейство эффективных схем для численного решения прямой задачи Захарова-Шабата. Схемы имеют удобный вид для «быстрого» вычисления.

Ключевые слова: задача Захарова-Шабата, нелинейное преобразование Фурье, нелинейное уравнение Шрёдингера.

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) широко применяется в области телекоммуникационных приложений и используется для описания распространения импульсов в оптическом волокне. В последнее время исследуются новые подходы к решению НУШ с использованием метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [1], также называемом в литературе нелинейным преобразованием Фурье. Первым этапом в МОЗР является решение прямой задачи рассеяния для системы Захарова-Шабата (ЗШ). На этом этапе определяются нелинейные спектральные данные на основе заданного сигнала $q(t)$. Несмотря на большое количество работ, посвященных численному решению прямой задачи ЗШ, все еще актуальной остается проблема разработки методов повышенной точности. Высокая точность является важным фактором в задачах, где требуется анализировать сложные сигналы. Для правильного описания таких сложных сигналов и их спектральных параметров требуются более точные и быстрые численные методы.

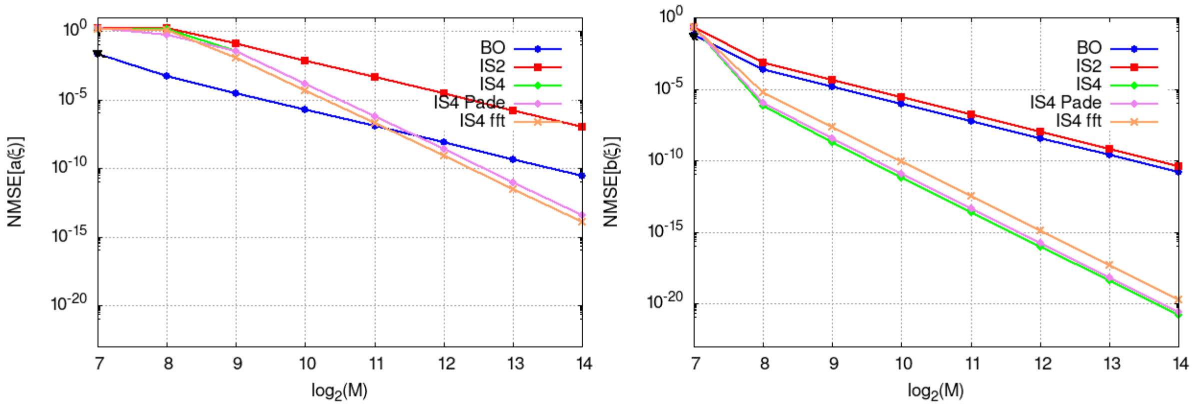

Рис. 1. Среднеквадратичная погрешность вычисления спектральных данных в зависимости от числа точек M, в которых задан исходный сигнал $q(t) = A[\,sech\,(t)]^{1+iC}$ при $A = 5.2$, $C = 4$

В работе предлагается семейство новых схем численного решения системы ЗШ:

$$\boldsymbol{v}_t = (S + U(t))\boldsymbol{v},\ S = \begin{pmatrix} -i\xi & 0 \\ 0 & i\xi \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & q(t) \\ r(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь S – постоянная матрица, которая исключается заменой $\boldsymbol{v} = e^{tS}\overline{\boldsymbol{v}}$. В результате для системы

$$\overline{\boldsymbol{v}}_t = \overline{U}(t)\overline{\boldsymbol{v}},\ \overline{U}(t) = e^{-tS}U(t)e^{tS}$$

схема, например, 2-го порядка записывается в терминах огибающих как

$$T_n = X^{1/2}e^{hU_n}X^{1/2},\ X = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Аналогично выписывается схема 4-го порядка. Данные схемы имеют удобный вид для «быстрого» вычисления, т.е. $O(n\,(\log n)^2)$ вместо $O(n^2)$ [2], поскольку спектральный параметр входит через экспоненту: $z = e^{ih\xi}$. Это позволяет записать передаточную матрицу на каждом шаге в виде полинома от z и использовать алгоритмы быстрого перемножения полиномов для вычисления итогового решения.

В работе исследуются точность и эффективность предложенных схем (Рис. 1). Реализованы различные варианты предложенных схем, использующие, как прямое вычисление матричной экспоненты, так и аппроксимацию Паде. Также исследуется возможность использования быстрого преобразования Фурье (БПФ) для вычисления использующихся в записи схем производных от начального сигнала.

Исследование выполнено при финансовой поддержке государственного задания на проведение фундаментальных исследований FSUS-2020-0034 (М.С.Б., В.И.А. – теоретические исследования, Ф.М.П. – постановка задачи). Работа Ч.И.С. и К.Д.И. (численные исследования) выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант No.17-72-30006).

[1] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, JETP, **34**, 62–69 (1972).
[2] S. Wahls and H. V. Poor, 2013 ICASSP, Vancouver, BC, Canada, 5780-5784 (2013)